

Operaciones básicas con números enteros y con fracciones

OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

Suma de números enteros

Cuando tienen el mismo signo: Se suman los valores y se deja el signo que tengan, si son positivos signo positivo y si son negativos signo negativo. Si no se pone nada delante del número se entiende que es +.

$$(+5) + (+4) = +9 \text{ es lo mismo que: } 5 + 4 = 9$$

$$(-5) + (-4) = -9 \text{ es lo mismo que: } -5 - 4 = -9$$

Cuando tienen distinto signo: Se restan sus valores absolutos y se pone el signo del sumando de mayor valor absoluto. (Se restan y se deja el signo del más grande en valor absoluto).

$$(+20) + (-10) = 20 - 10 = +10 \text{ (} 20 - 10 = 10, \text{ el más grande es } +20, \text{ se pone } +10)$$

$$(-8) + (+3) = -8 + 3 = -5 \text{ (} 8 - 3 = 5, \text{ el más grande es el } -8, \text{ se pone } -5)$$

$$(+11) + (-2) = 11 - 2 = +9 \text{ (} 11 - 2 = 9, \text{ el más grande es el } 11, \text{ se pone } +9)$$

Producto y Cociente de números enteros: Regla de los signos

<i>Producto</i>					<i>Cociente</i>				
+	×	+	=	+	+	÷	+	=	+
-	×	-	=	+	-	÷	-	=	+
+	×	-	=	-	+	÷	-	=	-
-	×	+	=	-	-	÷	+	=	-

Para multiplicar dos números enteros se multiplican sus valores absolutos y se aplica la regla de los signos. Cuando van dos signos seguidos hay que separarlos utilizando paréntesis.

$$(+8) \cdot (+3) = +24$$

$$(-3) \cdot (-2) = +6$$

$$(+4) \cdot (-1) = -4$$

$$(-2) \cdot (+4) = -8$$

Para dividir se divide el dividendo entre el divisor y se aplica la regla de los signos. Una división es exacta cuando el resto es 0.

$$(-15) : (-15) = +1$$

$$8 : 4 = +2$$

$$-4 : (-2) = +2$$

$$10 : 2 = +5$$

$$10 : (-2) = -5$$

$$(-8) : 4 = -2$$

$$24 : (-4) = -6$$

$$-6 : 3 = -2$$

Operaciones combinadas.

Las operaciones combinadas siguen la siguiente jerarquía:

1. Corchetes y paréntesis. Si hay varios encadenados se empieza a operar por el más interior
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones.
4. Sumas y restas.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 a) \quad 6 + 2 \cdot 5 = 16 & \rightarrow \begin{cases} 1^\circ \text{ multiplicamos } 2 \cdot 5 = 10 \downarrow 6 + 10 = \\ 2^\circ \text{ sumamos } 6 + 10 = 16 \end{cases} \\
 b) \quad -8 : 2 - 5 = -9 & \rightarrow \begin{cases} 1^\circ \text{ dividimos } (-/+) - 8 : 2 = -4 \downarrow -4 - 5 = \\ 2^\circ \text{ sumamos } -4 - 5 = -9 \end{cases} \\
 c) \quad 5 \cdot 3 + (6 + 1) = 22 & \rightarrow \begin{cases} 1^\circ \text{ sumamos el paréntesis } 6 + 1 = 7 \downarrow 5 \cdot 3 + (7) = \\ 2^\circ \text{ paréntesis } (+ \text{ por } +) \quad 5 \cdot 3 + 7 = \\ 3^\circ \text{ producto y suma } 15 + 7 = 22 \end{cases} \\
 d) \quad -5 + 7 - (5 \times 1) = -3 & \rightarrow \begin{cases} 1^\circ \text{ paréntesis } (- \text{ por } +) \quad -5 + 7 - 5 = \\ 2^\circ \text{ agrupamos y sumamos } -10 + 7 = -3 \end{cases} \\
 e) \quad 2 - [-(7 - 2) + 1] - 4 = 2 & \rightarrow \begin{cases} 1^\circ \text{ operación del } () \text{ y lo quitamos } \begin{cases} 2 - [-(5) + 1] - 4 = \\ 2 - [-5 + 1] - 4 = \end{cases} \\ 2^\circ \text{ operación del corchete y lo quitamos } \begin{cases} 2 - [-4] - 4 = \\ 2 + 4 - 4 = \end{cases} \\ 3^\circ \text{ sumamos } 2 + 4 - 4 = 2 \end{cases} \\
 f) \quad -5 \times [(-3 \times 2) : (-3) + 1] = -15 & \rightarrow -5 \times [-6 : (-3) + 1] = \downarrow -5 \times [2 + 1] = \downarrow -5 \times 3 = -15
 \end{aligned}$$

Divisibilidad

➤ Relación de divisibilidad

Dos números están emparentados por la relación de divisibilidad, si la división del mayor entre el menor es exacta (tiene resto cero). Por ejemplo $12:3=4$ están emparentados por la relación de divisibilidad. Decimos entonces que 12 es múltiplo de 4, y que 4 es divisor de 12.

Un número distinto de 1 es **primo** cuando sólo es divisible por el mismo y la unidad.. Existen infinitos números primos. Los primeros son 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41....

Un número distinto de 1 es **compuesto** es el que no es primo.

Los divisores de un número lo forman sus divisores positivos y negativos. El dos es un número primo divisible por +2, -2, +1 y -1. La descomposición factorial de un número es única salvo orden de los factores y signo.

➤ Recuerda los criterios de divisibilidad por 2, 3 y 5

Un número es divisible por.

Por 2: Cuando acaba en 0 o en cifra par. Como los números: 20, 4, 322.

Por 3: Cuando la suma de sus cifras es un múltiplo de 3. Como los números: 12, 342, 81.

Por 5: Cuando acaba en 0 o en 5. Como los números: 10, 25, 255, 325.

Usamos estos criterios para descomponer en factores primos.

Ejercicios resueltos

$$\begin{aligned} 1) \quad 18 + [9 - (-3) + 5] &= \\ 18 + [9 + 3 + 5] &= \\ 18 + [17] &= \\ 18 + 17 &= 35 \end{aligned}$$

* Los ejercicios se deben hacer así. Cada paso ha de ir en una línea. Aquí por espacio en lugar de utilizar líneas distintas usamos una flecha despues de cada igual.

= ↵ El ejercicio 1 quedaría así:

$$18 + [9 - (-3) + 5] = \leftarrow 18 + [9 + 3 + 5] = \leftarrow 18 + 17 = 35$$

$$2) \quad -[4 - (-16)] = \leftarrow -[4 + 16] = \leftarrow -[20] = -20$$

$$3) \quad 14 - (8 + 7) - [4 + 2 - 3 - (-4 + 5)] = \leftarrow 14 - (15) - [3 - (1)] = \leftarrow 14 - 15 - 2 = -3$$

$$4) \quad 5 + (-12) - [-3 - 12] = \leftarrow 5 - 12 - [-15] = \leftarrow 5 - 12 + 15 = +8$$

$$5) \quad 3 - [4 - (5 - 7)] - \{9 - [5 - (-4)]\} = \leftarrow 3 - [6] - \{9 - [9]\} = \leftarrow 3 - 6 - \{0\} = -3$$

$$6) \quad 15 \div (-3) = -5$$

$$7) \quad 7 \cdot (-3) + [2 + 3(-5)] = \leftarrow -21 + [2 - 15] = \leftarrow -21 - 13 = -34$$

$$8) \quad 8 + 10 \div 2 - 4 \cdot 2 = \leftarrow 8 + 5 - 8 = 5$$

$$9) \quad 29[(-10) + 1] = \leftarrow 29[-10 + 1] = \leftarrow 29[-9] = -261$$

$$10) \quad (-12) \cdot 7 - 13(-5) = \leftarrow -84 + 65 = -19$$

$$11) \quad (4 - 20)13 = -208$$

$$12) \quad (-5) \cdot 7 - 9(-4) = 1$$

$$13) \quad (-48 + 32) - (67 - 82) = -1$$

$$14) \quad -[-13 + (24 - 68)] - (-48 + 95) = 10$$

$$15) \quad 12(-7) - 12 = -96$$

$$16) \quad 48 - [15 - (43 - 38) - 27] = 65$$

$$17) \quad -32 - [19 - (24 - 46)] = -73$$

$$18) \quad -(24 - 89 + 18) + (-91 + 24) = -20$$

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES: FRACCIONES

Suma y Resta de Números Racionales

1. Cuando tienen el mismo denominador

Se suman o se restan los numeradores y se deja el mismo denominador. Después si podemos se simplifica.

2. Cuando tienen distinto denominador

Hay que reducir a común denominador. Para ello:

Multiplicación de fracciones

1º Se multiplican los numeradores, este producto es el nuevo numerador.

2º Se multiplican los denominadores, su producto es el nuevo denominador.

3º Después se simplifica.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Fracción de un número: Es una multiplicación de fracciones, el número tiene como denominador uno. $\frac{a}{b} \text{ de } n = \frac{a \cdot n}{b}$

Fracción de una fracción: Se multiplican las dos fracciones. $\frac{a}{b} \text{ de } \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Fracción inversa: Se le da la vuelta, el numerador pasa a ser el denominador y el denominador es el nuevo numerador.

La inversa de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$; El inversa de $a = \frac{1}{a}$

Suele denotarse con $^{-1}$. Por ej: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$; $5^{-1} = \frac{1}{5}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$

División de fracciones

1º Multiplicamos el numerador de la primera por el denominador de la segunda, el producto es el nuevo numerador.

2º Multiplicamos el denominador de la primera por el numerador de la segunda, el producto es el nuevo denominador.

3º Después si podemos se simplifica.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Multiplicación

$$\text{a) } \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20} \quad \text{b) } \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{20}{20} = 1 \quad \text{*Son fracciones inversas, dan uno.}$$

Fracción de un número y fracción de una fracción

$$\text{a) } \frac{3}{4} \text{ de } 60 = \frac{3}{4} \cdot \frac{60}{1} = \frac{180}{4} = 45 \quad \text{b) } \frac{4}{5} \text{ de } \frac{1}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$$

División

$$\text{a) } \frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{15}{8} \quad \text{b) } \frac{2}{5} : \frac{7}{4} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 7} = \frac{8}{35} \quad \text{también x por la inversa de la 2ª } \frac{2}{5} : \frac{7}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{35}$$

La Jerarquía de operaciones es siempre la misma.

Para operar con números decimales periódicos, es mejor pasarlos a fracción antes de efectuar las operaciones. Por ej:

1. Halla las fracciones generatrices de los siguientes decimales exactos:

$$a) 0,54 = \frac{0,54 \cdot 100}{100} = \frac{54}{100} = \frac{27}{50} \quad b) -2,3 = \frac{-2,3 \cdot 10}{10} = \frac{-23}{10} \quad c) 0,25 = \frac{0,25 \cdot 100}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

2. Halla las fracciones generatrices de los siguientes decimales periódicos puros

$$a) 3,\widehat{21} = \frac{321-3}{99} = \frac{318}{99} = \frac{106}{33} \quad b) 1,9999 = 1,\widehat{9} = 2 \quad c) 0,\widehat{26} = \frac{26}{99} \quad d) 0,\widehat{1} = \frac{1}{9} \quad e) 4,599 = 4,5\widehat{6}$$

3. Halla las fracciones generatrices de los siguientes decimales periódicos mixtos:

$$a) 1,1\widehat{3} = \frac{113-11}{90} = \frac{102}{90} = \frac{17}{15} \quad b) 3,5\widehat{63} = \frac{3563-35}{990} = \frac{3528}{990} = \frac{196}{55} \quad c) 0,2\widehat{4} = \frac{24-2}{90} = \frac{11}{45}$$

4. Calcula hallando primero las fracciones generatrices:

$$0,54 + \frac{3}{5} - 1,9999 + 1,1\widehat{3} = \frac{27}{50} + \frac{3}{5} - 2 + \frac{17}{15} = \frac{81}{150} + \frac{90}{150} - \frac{300}{150} + \frac{170}{150} = \frac{41}{150}$$

Ejercicios resueltos

- $\left(\frac{19}{16} - \frac{4}{16}\right) - \frac{3}{16} = \frac{15}{16} - \frac{3}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$
- $\frac{7}{6} - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{6} - \left(\frac{4}{6}\right) = \frac{7}{6} - \frac{4}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- $7 - \left(4 - \frac{11}{19}\right) = 7 - \left(\frac{4 \cdot 19}{19} - \frac{11}{19}\right) = 7 - \left(\frac{76}{19} - \frac{11}{19}\right) = 7 - \left(\frac{65}{19}\right) = \frac{133}{19} - \frac{65}{19} = \frac{68}{19}$
- $3 - \frac{11}{12} - \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{36}{12} - \frac{11}{12} - \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{36}{12} - \frac{22}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$
- $\left[\frac{77}{6} - \left(4 - \frac{7}{3}\right)\right] - \frac{1}{2} = \left[\frac{77}{6} - \left(\frac{12}{3} - \frac{7}{3}\right)\right] - \frac{1}{2} = \left[\frac{77}{6} - \frac{5}{3}\right] - \frac{1}{2} = \frac{67}{6} - \frac{1}{2} = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}$
- $2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = \frac{2}{2} = 1$
- $\frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 1} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 1} = \frac{12}{4} = 3$
- $\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{8 \cdot 5}{15 \cdot 4} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$
- $\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 1} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 1} = \frac{10}{3}$
- $0 : \frac{1}{2} = 0$ * cero dividido entre un número es siempre cero. No tenemos nada para repartir.
- $-2 + \frac{3}{4} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 + \left(\frac{3 \cdot (-2)}{4 \cdot 1}\right) = -2 - \frac{6}{4} = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$

* El signo - puede ir en el numerador, en el denominador o delante de la fracción.

En el denominador no se suele poner.

- $\frac{-3/-8}{-6} = \frac{3}{8} : \frac{-6}{1} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{-6} = -\frac{1}{16}$
- $\left[\left(-\frac{2}{5}\right) : (-4)\right] : \left[\left(\frac{5}{-3}\right) : \left(-\frac{1}{-6}\right)\right] = \left[\frac{2}{20}\right] : \left[\frac{30}{3}\right] = \frac{1}{10} : \frac{10}{1} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$

* Cuando hay operaciones en el numerador y en el denominador, hacemos por separado el numerador y el denominador. Después dividimos el numerador entre el denominador.

- $\frac{3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}}{\frac{7}{3} - \frac{5}{6}} = \frac{3 + \frac{4}{6}}{\frac{14}{6} - \frac{5}{6}} = \frac{\frac{22}{6}}{\frac{9}{6}} = \frac{22 \cdot \cancel{6}}{\cancel{6} \cdot 9} = \frac{22}{9}$
- $\frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{4}}{\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{9} - \frac{9}{7}} = \frac{\frac{12}{20} - \frac{5}{20}}{\frac{36}{27} - \frac{9}{7}} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{42}{21} - \frac{9}{7}} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{33}{7}} = \frac{7 \cdot 7}{20 \cdot 33} = \frac{49}{660}$

Ejercicios con soluciones

$$1. \quad (-12) : \left(\frac{4}{-9} \right) = 27$$

$$2. \quad 0 \cdot \left(-\frac{1}{18} \right) = 0$$

$$3. \quad \left(-\frac{3}{4} \right) : \left(\frac{6}{-5} \right) = \frac{5}{8}$$

$$4. \quad \frac{4}{5} : \left[\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{3} \right) \cdot 12 \right] = \frac{8}{35}$$

$$5. \quad \left(\frac{14}{-5} \right) : (-21) = \frac{2}{15}$$

$$6. \quad \frac{\frac{-8}{21}}{\frac{-72}{49}} = \frac{7}{27}$$

$$7. \quad (-20) : 6 + 8 : 6 = -2$$

$$8. \quad \left[\left(\frac{-4}{15} \right) \cdot \frac{5}{8} \right] : \left(\frac{1}{-6} \right) = 1$$

$$9. \quad \frac{49}{5} : 7 + \left(3 - \frac{11}{7} \right) : \left(\frac{14}{49} + \frac{3}{7} : \frac{7}{12} \right) = \frac{14}{5}$$

$$10. \quad \frac{-1 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3} \right)}{\frac{1}{3} - \frac{2}{3} : 7} = -7$$

$$11. \quad \frac{8}{5} \cdot \left[\frac{2}{7} + \left(-\frac{1}{5} \right) + \frac{2}{3} \right] = \frac{632}{525}$$

$$12. \quad \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \right] = \frac{-4}{6}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS (la solución aparece al lado)

1. Realiza las siguientes operaciones con números enteros:

$$a) -13 + [-5 - [-2 - (-3 - 1) + (-7)] - (-6 + 1 - 3)] - 5$$

$$R=-10$$

$$b) 4 - \{6 + [3 - (10 - 6) + 7] - (5 - 2)\} + 9$$

$$R=4$$

- c) $-3+8-(-3)+4-[3-(-4+7-5+1)-2+3(-1)]-9$ R=4
- d) $-(7-2)+\{-[9-(14-5)+3]\}+8$ R=0
- e) $(-2)\{-4+[(3+5)(-2)+(-8+4):(-1-1)]\}+1$ R=13
- f) $(-8+5)(-1)+(-9+6-1):(-5+1)-(-8)\cdot 2$ R=20
- g) $-[-(-2+1)+(-9):3]-(-5+4):(-9+7+1)$ R=1
- h) $3\cdot(-4)+2(-2)(-1)-(-3)(-5)(-1)(-2)-2(-3)$ R=-32
- i) $9:(-3)+3(-2)(-1)5-12:(-1+4)-(-3)2(-4)$ R=-1
- j) $-2-3\{1-4+(-5)[3-4-2(7-3+2)]+6\}$ R=-206

2. Realiza las siguientes operaciones con fracciones:

- a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}$ $R=\frac{1}{16}$
- b) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}+2\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}+1\right)$ $R=1$
- c) $\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$ $R=\frac{1}{6}$
- d) $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)-\left[1-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}-\frac{3}{20}\right]$ $R=\frac{-1}{3}$
- e) $\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{8}{9}\right)}{\frac{5}{3}:\frac{7}{6}}$ $R=\frac{-7}{15}$
- f) $\frac{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}:\frac{3+\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{14}}$ $R=\frac{5}{2}$
- g) $\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{4}\right)^3:\left(\frac{9}{8}-\frac{5}{4}\right)^2$ $R=-1$
- h) $\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{6}\right)^2:\left(\frac{2}{3}-1\right)^2$ $R=-2$
- i) $\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{9}\right)^{-1}+4$ $R=0$
- j) $\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{12}\right)+\left(\frac{5}{4}-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-4\right)^{-1}$ $R=0$